自然数の分類における分離数の役割と電算機による計算成果

千　賀　　博

0　序

数の分類については，既に古くピタゴラス学派によって，奇数，偶数，素数，完全数その他が挙げられているが，これら相互の関係は明らかにされていない。完全数の代りに，新たな数概念である分離数（第 2 節に詳述）を用い，自然数全体を，奇数と偶数，素数と合成数，分離数と非分離数の三種の概念によって分類することは，数学の構造を明かにする上から，極めて重要な意義をもつものといわねばなるまい。一般に数の体系を，抽象代数学の代数系概念にもとづいて論述することは，数学教育現代化の立場からも重視されているが[1]，これとともに，従来の総合的直観的方法もまた，少くも数体系教育の基礎段階においては，不可欠のものであるということができよう。

数学の歴史が示すように，数学は数ともに成長したが，今日の数学は，それを数の学問とはいえないほど広汎な発達を遂げた。しかし数学の如何なる分野も——例えば集合論にしても，位相数学にしても——直接にまた間接に，数と無関係であるとはいえない。従って数概念を分類し，数体系を論究して，数の構成を明らかにすることは，やがて数学そのものの構造を究明する一つの有力な手段を与えることともなるであろう。本文の目的は，このような観点に立ち，数概念の特殊より一般への拡張過程の最初の段階において果す分離数の役割を位置づけ，かつ電子計算機を用いて得られた成果を示すにある。

1　予　　備

本節は，数学専攻以外の読者のため，必要最小限度の準備をする目的をもって，特に設けられたものである。

任意の整数 a を $m>0$ で割った商が q で余りが r であることは

$$(1)\quad a=mq+r,\qquad 0\leqq r<m$$

のように書きあらわされる。厳密にいえば，整数 a，$m>0$ を与えるとき，(1)を満足する整数 q，r が存在し，然もそれは唯一組に限ることが証明される。一方，二つの整数 a，b の差 $a-b$ が m の倍数のとき，すなわち

$$(2)\quad a-b=mq$$

が成立するとき，a は b に m を法として合同（congruent）であると称せられ，これをつぎのように書きあらわす。

$$(3)\quad a\equiv b\ (mod.\ m)$$

また一つの数 a をとって，これと合同なすべての数の集りを考えて，それを法 m の一つの類という。そしてこの類に属しない数 a' があるとき，a' に合同なすべての数で出来る類は，先の a に合同なすべての数の集りである類とは全く異なるものであることが示される。このようにして，a，a'，a''……のそれぞれに合同な数よりなり，しかも互に全く異る類が得られ，すべての整数は，法 m によって類別されるのである。

詳言すれば，a，b が(1)によって，それぞれ

$$(4)\quad a=mq_1+r_1,\qquad b=mq_2+r_2,\ 0\leqq r_1, r_2<m$$

のように書きあらわされるとき，(2)従って(3)が成立するのは，(4)の二式を辺々引いて得られる。

$$(5)\quad a-b=m(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$$

において，$r_1-r_2=0$ すなわち $r_1=r_2$ のときに限る。換言すれば，任意の

正負の整数をmで割ったときの余りが相等しくなるようなすべての数が，一つの類を構成するのであり，然もこのような余りは、0，1，2，……，$m-1$ のm種あることを考慮するとき，mを法とすれば，整数はm個の類に類別されることがわかる。[2] さらに説明を補足すれば，合同（記号≡および$mod.$ を用いる）というのは，特殊の場合として，相等（記号 = を用いる）を含むところの，より広い概念である。すなわち合同式(3)は，a と b とをmで割ったとき，一般には余りは等しくて商は等しくないような数が一つの類を構成することを示すものであるが、特に商までも等しくなったときに等式 $a=b$ となるのである。われわれは，このような合同理論を，自然数（負数をも考れば整数）の偶数，奇数への分類の場合に適用することができる。すなわち偶数，奇数とは，それぞれ2で割ったとき，割り切れる数（余りが0の場合），割り切れない数（余りが1の場合）のことであるから，そのような数は，上記一般の場合(1)において，$m=2$ とおき，かつそれぞれ $r=0,1$ とおくことにより

(6)　$a=2q,\quad a=2q+1$

のように書きあらわされる。そして(6)を満足する数の集りは，さらに(3)により，それぞれ

(7)　$a\equiv 0(mod.\ 2),\quad a\equiv 1(mod.\ 2)$

のように書きあらわされる。従ってすべての自然数は，2を法として，偶数の類と奇数の類とに類別されることがわかる。また合同でないことは，≢なる記号であらわされるから，(7)の第2式は，$a\not\equiv 0$（$mod.$ 2）と書くこともできる。何となれば，2で割るときの余りは0（割り切れるとき）か1（割り切れないとき）かの何れかであり，それ以外の場合はないからである。（注意：次節の(13)式参照。ただしそこではaの代りにnが用いられる。）

このようにして，自然数を偶数，奇数に分類するに当っては，合同(Congrnence) の概念を適用すればよいのであるが，つぎに本文におけ

る1および素数と合成数との分類に対する理解のために，数理論理学（Mathematical Logic）あるいは記号論理学（Symbolic Logic）と称せられるものの構成と記号の一端について述べなければならない。記号論理学は，命題全体を一つの文字であらわして論ずる命題論理学と，この基盤の上に立って命題を主語と述語とに分け，その各に別個の記号を与えて論ずる述語論理学とに大別される。そして述語論理においては，命題論理において用いられる演算記号の$\vee$（離接），$\wedge$（合接），$\sim$（否定）等の他に，数たな演算記号として，全称記号$\forall$（‘すべての’を意味する）と存在記号$\exists$（‘ある’あるいは‘存在する’を意味する）とが用いられる。また述語論理は命題関数 $p(x)$ の形をとる。ここに x は主語をあらわし，p は述語をあらわすのであるが，さらに具体的に述べれば，全体集合 I で定義されている一つの命題関数 $p(x)$ があった場合，I に属する‘すべての’ x に対して真であることと，I に属する‘ある’ x に対して（あるいは，x が‘存在して’その x に対して）真であることとは、それぞれ

(8)　$(\forall x \in I),\ p(x), \quad (\exists x \in I), p(x)$

のように書きあらわされるが[3]、これらは，それぞれ簡単に

(9)　$\forall x p(x), \quad \exists x p(x)$

と略記される場合が多い。これらの限定記号（全称記号と存在あるいは特称記号の総称）と前述のコングルエンス記法とを用いるとき，1と素数（1とそれ自身以外に約数をもたない数）と合成数（1とそれ自身以外に約数をもつ数，すなわち素数でない数）とは、それぞれつぎの式によってあらわされる。（注意：次節の(14)式参照。ただしそこではaの代りにnが用いられる。）

(10)　$a \not\equiv 0(mod.\ \forall m;\ m \neq 1,\ a),\quad a \equiv 0(mod.\ \exists m;\ m \neq 1, a)$

いまこの式の理解のために，各論理式を直訳して（普通の文章体にして）記述すれば，(10)の第1式は‘素数 a とは，1でもなく，またそれ自身で

もないようなすべての数mを法として0に合同でない数——そのようなにmよって割り切れない数である’となり，第2式は‘合成数aとは，1でもなく，またそれ自身でもないようなある数mが存在して，そのようなmを法として0に合同な数——そのようなmによって割り切れる数である’となろう。

2　自然数の分類と分離数

自然数は，その成立の根本において，空間的な計量数（集合数・基数）と時間的な順序数（序数）との二つの観点から見られるが，自然数に属するもので，直接その分類に役立つものとしては，‘十分大きい奇数は3個の奇素数の和になる’とか‘完全数は偶合成数の一部においてのみ存在する’とかいわれるように，奇数（および偶数）と素数（および合成数）という二種類の数概念が，何の障害も抵抗もなく挙げられよう。従来，自然数分類の役割を果す上で，これら二者に継ぐような有力なものとてはなく，しいていえば，完全数（および非完全数）が挙げられるであろうが，いまこれによる自然数の分類を考えるに，完全数（ある自然数が，1を含めてそれ自身nにより小さいすべての約数の和に等しいとき，その数nを完全数という。例えば，$6=1+2+3$。）は，いわゆるユークリッドの型として

(11)　$2^n(2^{n+1}-1)$

なる形をなして，僅かに偶合成数の一部に存在するのみであるから，これによる自然数の分類は，はなはだしく一般妥当性を欠くものとならざるを得ない。

今これに代り，自然数nの約数対の個数$T^*(n)$と素数の個数$p^*(n)$との差である分離度$D_s(n)$が0でないか0であるかによって，分離数と非分離数とを定義し[4]，（$T^*(n)$は次節に示す公式によって計算できるのであるが，ここではメノコでもわかる簡単な二数について例示しよう。自然数30は，2・3・5のように素因数分解されるから，$P^*(30)=3$となるのに対

して，その約数対は1と30，2と15，3と10，5と6の4組であるから，$T^*(30)=4$ となる。故に $D_s(30)=4-3=1\fallingdotseq 0$ となり，30は分離数であることがわかる。——分離数の名称は，$T^*(n)$ と $P^*(n)$ とが一致せず分離しているというところからつけられたものである——。つぎに40は，$2^3\cdot 5$ のように素因数分解せられ，$P^*(40)=4$ となるのに対し，約数対は1と40，2と20，4と10，5と8の4組となるから，$T^*(40)=4$。故に $D_s(40)=4-4=0$ となり，40は非分離数であることがわかる）。このような分離数（および非分離数）によって，自然数を分類するならば，前述完全数（および非完全数）による分類の不備は除去され，つぎのように整備された分類表示が得られる。

$$
(12)\quad \text{自然数}\begin{cases}
\text{奇　数}\begin{cases}
\text{1と素数}\to\text{〔非分離数〕}\\
\text{合成数}\to\begin{cases}\text{非分離数}\\ \text{分離数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{偶　数}\begin{cases}
\text{素　数}\to\text{〔非分離数〕}\\
\text{合成数}\to\begin{cases}\text{非分離数}\\ \text{分離数}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

すなわち，この表に示されるように，分離数は，奇合成数の中にも偶合数の中にも存在し（完全数は，前述のように後者の範囲に限られる），しかもその個数は，次節に示すように，1000以下の範囲で339個も存在する（完全数は，前述のように3個しか存在しない）。分類上の効用は雲泥の差というべきであろう。（ただし完全数の存在が分離数を発見する一つの手引となったことは否定できない）。

要言すれば，

$$(13)\quad n\fallingdotseq 0 \text{ or } \equiv 0\ (mod.\ 2)$$

によって定義される奇数，偶数による自然数の分類，並びに

$$(14)\quad n\fallingdotseq 0(mod.\ \forall m;\ m\fallingdotseq 1,\ n)\ \text{or} \equiv 0(mod.\ \exists m;\ m\fallingdotseq 1,\ n)$$

よって定義される1と素数，合成数による自然数の分類に対して，

$$(15)\quad D_s(n)=T^*(n)-P^*(n)\neq 0 \ \text{or}=0$$

によって定義される分離数，非分離数によって自然数の新たな分類が可能となる。この第3分類法の効用としては，現在知られ，また将来見出されるであろう他の如何なる特殊的具体的事実（例えば，連続する整数の最小公倍数の3種[5]）にも増して，既に序文にも触れたように，数学の構造を明らかにする上に役立つことこそ，最大のものとして挙げられなければならない。

数の分類に関する歴史は古く，数学を単なる実用の学から独立させて，これにはじめて科学的体系を与えたといわれるピタゴラス並びにその学派によって既に試みられ，前述の奇数，偶数，完全数のほか，三角数，四角数，親和数等があげられ，、さらに項を改めて，前述の素数のほか，互に素なる数，ピタゴラスの数等の諸概念が挙げられているが[6]，上記(12)において，例えば分離数に代えるに完全数をもってした次の分類表示のようなものは挙げられず，その後も遂に示されることはなかった。そしてその最大原因は，既に述べたように，分離数に匹敵する有力な数概念が発見されなかったためだといえよう。

$$(16)\quad \text{自然数}\begin{cases}\text{奇　数}\begin{cases}\text{1と素数}\rightarrow\text{〔非完全数〕}\\ \text{合 成 数}\rightarrow\text{（非完全数）}\end{cases}\\ \text{偶　数}\begin{cases}\text{素　　数}\rightarrow\text{〔非完全数〕}\\ \text{合 成 数}\rightarrow\begin{cases}\text{非完全数}\\ \text{完全数}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

本節を終るに当り，自然数（特にその最初の数1）と0との関係について一言触れておきたい。自然数は，最初の数1とそれに＋1なる操作を繰返し施すことによって生成されるものであり，厳密にはペアノの公理系によって成立するものであるが，古来このペアノの公理系を満足する1，2，3，……なる無限系列を自然数の系列と称するから，これに0を付加した0，

1, 2, 3, ……なる系列は，本来‘0および自然数’の系列と称せられるべきである。しかし自然数を加減の体系としてとらえる限り，$1+1=2$ と同様に $0+1=1$ は考えられ，0と1との間に性格上の本質的相違は認められない。従って 0, 1, 2, 3, ……を単に‘自然数’の系列として見ることも可能なわけである。事実ペアノの公理系[7]において最初の数として，1の代りに0を置いても，理論上何等の支障を生じないのであり，このように0を自然数に含ませる用法は，論理学の領域においてもまた見ることができる[8]。電子計算機の理論的基礎を与えるものとして，記号論理学とともに重要なる2進法における0と1との関係なども，、同じ範疇に属するものといえよう。しかし自然数における乗除を問題とするとき，0と1との間には，性格上劃然たる区別の生ずることを注意しなければならない。実は上記ペアノの公理系において，最初の数として1の代りに0を置いた場合でも，自然数 x の乗法に関する限り，$x\neq0$ なる条件を必要とするのであるが，次節に述べるように，自然数を素因数に分解する場合にも，0因子というものは考えられないのである。すなわち乗除を問題とする限り，‘0と1’との間に存する壁は，‘1と素数’との間に存する壁（1と素数は，合成数でないという点で共通であるばかりでなく，見方によっては，1は素数の中の素数といえなくもないようなものであるにもかかわらず，両者は区別される）と同様に厚いことを忘れてはならない。

3　電子計算機による分離数表の作成

前節において，分離数を定義した公式(15)における二概念は，自然数 n の素因数分解を $n=p^a q^b r^c \cdots\cdots$ とするとき，つぎの二式によって与えられる。

(17)　$$P^*(n)=a+b+c+\cdots\cdots$$

(18)　$$T^*(n)=\frac{1}{2}\left[(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots+\frac{1}{2}\{1-(-1)^{(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots}\}\right]$$ [9]

（前節において，二桁の簡単な分離数を，公式(18)を用いることなく算出す

る二例を挙げたが，ここでは公式(18)を用いて，三桁の分離数を求める二例を示すことにする。連続した二数 $n=144$，$n=145$ について調べるに，$144=2^4\cdot3^2$，となるから $P^*(144)=4+2=6$，$T^*(144)=\frac{1}{2}[5\times3+\frac{1}{2}\{1-(-1)^{5\times3}\}]=8$，故に $D_s(144)=8-6=2\neq0$ となり，144 は分離数であることがわかる。同様に $D_s(145)=2-2=0$ のように算出されるから，145 は非分離数であることがわかる）

分離数はまた一々上記のように公式(15)等によらなくとも，その素因数分解の型を調べることによって見出すことができる。すなわち，つぎの何れかの形に素因数分解される自然数 n は分離数であることが証明される。[10]

(i)　$n=p^a$（ここに $a\geqq3$）

(ii)　$n=p^aq^b$（ここに $a\geqq2$，$b\geqq2$）

(iii)　$n=p^aq^br^c\cdots\cdots$（ここに $a\geqq1$，$b\geqq1$，$c\geqq1,\cdots\cdots$）

この素因数分解の型を調べるという方法によって，比較的容易に，1000以下の自然数の中に存在する339個の分離数を算出して，その表を作ることができるのであるが，1000を越える自然数の範囲における分離数の算出となると，時間と労力の関係上，電子計算機の力をかりるほかはない。つぎの表1は，かつて紙と鉛筆のみで計算されたものであるが，今回，計算機によってその正しさを確認するとともに，今迄着手できなかった表2以下を新たに作成することができた。

分離数が上記素因数分解の3型に分類されることの証明はここに省くが，自然数の分離性が発見された背後には，前述ピタゴラス以来の自然数に関する種々の特質特に素数の概念並びにその分布に関する興味と，これに対する完全数の概念とその位置づけの問題とが，強く脳裏に印象づけられていたことのほかに，名著の誉れ高い高木貞治著「初等整数論講義」を読みかつ講ずるに当り，素数の本質並びにその分布に関する解説と，[11] 自然数 n の約数の個数を与える公式

(19)　$T(n)=(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots$ [12]

を中心としての叙述とに深く心を引かれ，⒆から前記⒅を導き出し得たことが（実は素因数の個数との関連性は、約数の個数でなく約数対の個数において見らるべきだとの必要性から），大きな動機となって潜在していたことを付言しておきたい。

表1　（1から1000までの間の分離数）

(i) p^a ($a\geqq3$)	(ii) p^aq^b ($a, b\geqq2$)	(iii) $p^aq^br^c$ ($a, b, c, \cdots\cdots\geqq1$)									
8	36	30	198	310	414	506	598	678	760	846	930
16	72	42	204	312	418	510	600	680	762	850	935
27	100	60	210	315	420	516	602	682	765	852	936
32	108	66	220	318	426	518	606	684	770	854	938
64	144	70	222	322	429	520	609	690	774	855	940
81	196	78	228	330	430	522	610	693	777	858	942
125	200	84	230	336	434	525	612	696	780	860	945
128	216	90	231	340	435	528	615	700	782	861	946
243	225	102	234	342	438	530	616	702	786	868	948
256	288	105	238	345	440	532	618	705	790	870	950
343	324	110	240	348	442	534	620	708	792	874	952
512	392	114	246	350	444	540	624	710	795	876	954
625	400	120	252	354	450	546	627	714	798	880	957
729	432	126	255	357	455	550	630	715	804	882	960
―	441	130	258	360	456	552	636	720	805	884	962
―	484	132	260	364	460	555	638	726	806	885	966
―	500	138	264	366	462	558	642	728	810	888	969
―	576	140	266	370	465	560	644	730	812	890	970
―	648	150	270	372	468	561	645	732	814	894	975
―	675	154	273	374	470	564	646	735	816	897	978
―	676	156	276	378	474	570	650	738	819	900	980
―	784	165	280	380	476	572	651	740	820	902	984
―	800	168	282	385	480	574	654	741	822	903	986
―	864	170	285	390	483	580	658	742	825	906	987
―	968	174	286	396	490	582	660	744	826	910	988
―	972	180	290	399	492	585	663	748	828	912	990
―	1000	182	294	402	494	588	665	750	830	915	994

—	—	186	300	406	495	590	666	754	834	918	996
—	—	190	306	408	498	594	670	756	836	920	—
—	—	195	308	410	504	595	672	759	840	924	—

〔備考〕 各型につき，最小数と最大数のみをえらんで素因数分解を例示すれば

(i) $\begin{cases} 8=2^3 \\ 729=3^6 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 36=2^2\cdot 3^2 \\ 1000=2^3\cdot 5^3 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} 30=2\cdot 3\cdot 5 \\ 996=2^2\cdot 3\cdot 83 \end{cases}$

表2 （1001から2000までの間の分離数）

(i)型	(ii)型	(iii) 型									
1024	1089	1001	1100	1209	1309	1419	1512	1612	1705	1806	1904
1331	1125	1002	1102	1210	1310	1420	1515	1614	1708	1810	1905
—	1152	1005	1104	1212	1311	1422	1518	1615	1710	1812	1908
—	1156	1008	1105	1218	1314	1425	1520	1617	1716	1815	1910
—	1225	1010	1106	1220	1316	1426	1524	1620	1720	1818	1911
—	1269	1012	1110	1221	1320	1428	1526	1624	1722	1820	1914
—	1323	1014	1113	1222	1326	1430	1530	1626	1725	1824	1918
—	1352	1015	1116	1224	1330	1434	1533	1628	1729	1826	1920
—	1272	1020	1118	1230	1332	1435	1534	1630	1730	1827	1924
—	1444	1022	1120	1232	1334	1440	1540	1632	1734	1830	1925
—	1521	1023	1122	1235	1335	1442	1542	1634	1736	1833	1926
—	1568	1026	1128	1236	1338	1443	1545	1635	1738	1834	1930
—	1600	1030	1130	1239	1340	1446	1547	1638	1740	1836	1932
—	1728	1032	1131	1240	1342	1449	1548	1640	1742	1840	1935
—	1936	1034	1134	1242	1344	1450	1550	1644	1743	1842	1938
—	1944	1035	1140	1245	1350	1452	1551	1645	1746	1845	1940
—	2000	1036	1144	1246	1353	1455	1554	1650	1748	1846	1946
—	—	1038	1146	1248	1356	1456	1558	1652	1749	1848	1947
—	—	1040	1148	1254	1358	1460	1560	1653	1750	1850	1950
—	—	1044	1150	1258	1360	1462	1562	1656	1752	1854	1953
—	—	1045	1155	1260	1362	1463	1564	1659	1755	1855	1955
—	—	1050	1158	1265	1364	1464	1566	1660	1758	1860	1956
—	—	1054	1160	1266	1365	1474	1570	1662	1760	1862	1958
—	—	1056	1162	1270	1368	1476	1572	1665	1764	1866	1960
—	—	1060	1164	1272	1370	1479	1575	1666	1767	1869	1962

—	—	1062	1166	1274	1374	1480	1578	1668	1768	1870	1965
—	—	1064	1170	1275	1378	1482	1580	1670	1770	1872	1968
—	—	1065	1173	1276	1380	1484	1581	1672	1771	1876	1970
—	—	1066	1176	1278	1386	1485	1582	1674	1776	1878	1972
—	—	1068	1178	1281	1390	1488	1584	1677	1778	1880	1974
—	—	1070	1180	1284	1392	1490	1586	1680	1785	1881	1976
—	—	1071	1182	1287	1394	1491	1590	1683	1782	1884	1978
—	—	1074	1185	1288	1395	1494	1595	1686	1785	1885	1980
—	—	1078	1188	1290	1938	1495	1596	1690	1786	1886	1986
—	—	1080	1190	1292	1400	1496	1598	1692	1788	1887	1988
—	—	1085	1194	1295	1404	1498	1599	1694	1790	1890	1989
—	—	1086	1196	1298	1406	1500	1602	1695	1794	1892	1990
—	—	1090	1197	1300	1407	1505	1605	1698	1798	1896	1992
—	—	1092	1200	1302	1410	1506	1606	1700	1800	1898	1995
—	—	1095	1204	1305	1414	1508	1608	1702	1802	1900	1998
—	—	1098	1206	1308	1416	1510	1610	1704	1804	1902	—

表３　(2001から3000までの間の分離数)

(i)型	(ii)型	(iii)型									
2048	2025	2001	2106	2205	2298	2397	2499	2610	2703	2795	2900
2157	2116	2002	2108	2208	2300	2398	2502	2613	2706	2796	2904
2197	2304	2004	2109	2210	2301	2400	2505	2616	2709	2800	2905
2401	2312	2006	2110	2211	2310	2405	2506	2618	2710	2802	2907
—	2500	2010	2112	2112	2314	2406	2508	2620	2712	2805	2910
—	2592	2013	2114	2214	2316	2408	2510	2622	2714	2806	2912
—	2601	2014	2115	2220	2318	2409	2514	2625	2715	2808	2914
—	2704	2015	2118	2222	2320	2410	2516	2626	2716	2810	2915
—	2744	2016	2120	2223	2322	2412	2520	2628	2717	2812	2919
—	2888	2020	2121	2226	2324	2414	2522	2630	2718	2814	2920
—	2916	2022	2124	2230	2325	2415	2526	2632	2720	2820	2922
—	—	2024	2128	2232	2328	1418	2530	2634	2724	2821	2924
—	—	2028	2130	2233	2330	1420	2532	2635	2726	2822	2925
—	—	2030	2132	2235	2331	2422	2534	2639	2728	2826	2926
—	—	2034	2134	2236	2332	2424	2535	2640	2730	2828	2928

—	—	2035	2135	2238	2334	2430	2538	2646	2736	2829	2930
—	—	2037	2136	2240	2337	2431	2540	2650	2737	2830	2934
—	—	2040	2139	2242	2338	2436	2541	2652	2739	2832	2937
—	—	2044	2140	2244	2340	2438	2542	2655	2740	2834	2938
—	—	2046	2142	2247	2343	2440	2544	2658	2742	2835	2945
—	—	2050	2145	2250	2345	2442	2546	2660	2745	2838	2946
—	—	2052	2146	2254	2346	2444	2548	2664	2748	2840	2948
—	—	2054	2148	2255	2350	2445	2550	2665	2750	2842	2950
—	—	2055	2150	2256	2352	2448	2552	2666	2751	2844	2952
—	—	2058	2154	2260	2354	2450	2553	2667	2754	2847	2954
—	—	2060	2156	2261	2355	2451	2555	2668	2755	2849	2955
—	—	2064	2158	2262	2356	2454	2556	2670	2756	2850	2958
—	—	2065	2160	2265	2358	2457	2562	2674	2758	2852	2960
—	—	2067	2162	2266	2360	2460	2565	2676	2760	2856	2961
—	—	2068	2163	2268	2364	2464	2568	2678	2765	2860	2964
—	—	2070	2166	2270	2365	2465	2570	2679	2766	2862	2967
—	—	2072	2170	2274	2366	2466	2574	2680	2769	2865	2968
—	—	2074	2172	2275	2370	2470	2576	2682	2770	2868	2970
—	—	2076	2175	2277	2373	2472	2589	2684	2772	2870	2975
—	—	2079	2178	2278	2376	2475	2583	2685	2774	2871	2976
—	—	2080	2180	2280	2378	2478	2584	2686	2775	2874	2980
—	—	2082	2184	2282	2379	2480	2585	2688	2778	2877	2982
—	—	2085	2185	2286	2380	2482	2586	2690	2780	2880	2985
—	—	2086	2190	2288	2382	2484	2590	2691	2782	2882	2988
—	—	2088	2193	2289	2385	2485	2595	2694	2784	2884	2990
—	—	2090	2196	2290	2387	2486	2596	2695	2786	2886	2992
—	—	2091	2198	2292	2388	2490	2598	2697	2788	2890	2994
—	—	2093	2200	2294	2390	2492	2600	2698	2790	2892	2996
—	—	2094	2202	2295	2392	2494	2604	2700	2793	2895	3000
—	—	2100	2204	2296	2394	2496	2607	2702	2794	2898	—

表 4　（3001から4000までの間の分離数）

(i)型	(ii)型	(iii)型									
3125	3025	3002	3110	3213	3318	3416	3519	3610	3710	3813	3915
—	3087	3003	3111	3216	3320	3417	3520	3612	3714	3815	3916
—	3136	3006	3114	3219	3322	3420	3522	3614	3717	3816	3918
—	3200	3009	3115	3220	3324	3422	3525	3615	3718	3818	3920
—	3249	3010	3116	3222	3325	3423	2526	3618	3720	3819	3922
—	3267	3012	3120	3224	3330	3426	3528	3619	3723	3820	3924
—	3364	3014	3122	3225	3332	3430	3530	3620	3724	3822	3926
—	3375	3015	3124	3228	3333	3432	3531	3621	3726	3825	3927
—	3456	3016	3126	3230	3335	3434	3534	3624	3729	3828	3930
—	3844	3018	3128	3234	3336	3435	3535	3626	3730	3830	3933
—	3872	3020	3129	3237	3339	3438	3536	3627	3731	3834	3934
—	3888	3021	3130	3240	3340	3440	3538	3633	3732	3835	3936
—	3969	3024	3132	3243	3342	3441	3540	3634	3735	3836	3938
—	4000	3026	3135	3245	3344	3444	3542	3636	3738	3838	3939
—	—	3030	3138	3246	3345	3445	3546	3638	3740	3840	3940
—	—	3034	3140	3248	3346	3450	3549	3640	3741	3842	3942
—	—	3036	3144	3250	3348	3451	3550	3642	3744	3843	3944
—	—	3038	3145	3252	3350	3454	3552	3648	3745	3846	3945
—	—	3040	3146	3255	3354	3458	3553	3650	3750	3848	3948
—	—	3042	3150	3256	3355	3460	3555	3652	3752	3850	3950
—	—	3045	3154	3258	3358	3462	3556	3654	3756	3852	3952
—	—	3048	3156	3260	3360	3465	3558	3655	3759	3854	3954
—	—	3050	3157	3262	3363	3468	3560	3657	3760	3855	3955
—	—	3052	3160	3264	3366	3470	3562	3658	3762	3857	3956
—	—	3054	3162	3266	3367	3471	3564	3660	3765	3858	3960
—	—	3055	3164	3268	3370	3472	3565	3663	3766	3860	3962
—	—	3058	3165	3270	3372	3474	3567	3666	3768	3861	3965
—	—	3059	3168	3276	3374	3476	3570	3668	3770	3864	3966
—	—	3060	3170	3278	3378	3477	3572	3670	3772	3870	3970
—	—	3066	3171	3280	3380	3478	3575	3672	3774	3874	3972
—	—	3068	3172	3282	3381	3480	3576	3674	3780	3876	3975
—	—	3069	3174	3285	3382	3484	3580	3675	3782	3878	3976
—	—	3070	3178	3286	3384	3485	3582	3678	3783	3880	3978

—	—	3074	3180	3288	3388	3486	3585	3680	3784	3882	3980
—	—	3075	3182	3289	3390	3490	3586	3682	3786	3885	3982
—	—	3078	3185	3290	3393	3492	3588	3684	3790	3886	3984
—	—	3080	3186	3294	3395	3495	3590	3685	3792	3890	3990
—	—	3081	3190	3297	3396	3496	3591	3686	3794	3892	3995
—	—	3082	3192	3298	3399	3498	3594	3689	3795	3894	3996
—	—	3084	3195	3300	3400	3500	3596	3690	3796	3895	3999
—	—	3090	3196	3302	3402	3502	3597	3692	3798	3900	—
—	—	3094	3198	3304	3404	3504	3598	3696	3800	3905	—
—	—	3096	3201	3306	3405	3507	3600	3700	3801	3906	—
—	—	3100	3204	3310	3406	3510	3604	3702	3804	3910	—
—	—	3102	3206	3311	3408	3514	3605	3705	3806	3912	—
—	—	3105	3210	3312	3410	3515	3606	3706	3808	3913	—
—	—	3108	3212	3315	3414	3516	3608	3708	3810	3914	—

表５　（4001から5000までの間の分離数）

(i)型	(ii)型					(iii)　型					
4096	4225	4002	4095	4200	4300	4402	4508	4605	4706	4810	4910
4913	4232	4004	4098	4202	4301	4403	4510	4606	4708	4812	4914
—	4513	4005	4100	4206	4302	4404	4512	4610	4710	Ɛ814	4917
—	4608	4008	4102	4209	4305	4407	4514	4611	4712	4815	4920
—	4624	4010	4104	4210	4308	4408	4515	4614	4715	4816	4921
—	4761	4011	4108	4212	4310	4416	4518	4615	4716	4818	4922
—	5000	4012	4110	4214	4312	4420	4520	4620	4718	4820	4926
—	—	4014	4114	4215	4314	4422	4521	4623	4719	4823	4928
—	—	4015	4116	4216	4316	4424	4522	4626	4720	4824	4929
—	—	4017	4118	4218	4318	4425	4524	4628	4722	4826	4930
—	—	4018	4120	4220	4320	4428	4526	4630	4725	4828	4932
—	—	4020	4122	4221	4323	4430	4530	4632	4726	4830	4935
—	—	4025	4123	4224	4324	4431	4532	4634	4728	4836	4938
—	—	4026	4125	4228	4326	4433	4536	4635	4730	4838	4940
—	—	4028	4128	4230	4329	4434	4539	4636	4731	4840	4942
—	—	4029	4130	4233	4330	4437	4540	4638	4732	4842	4944
—	—	4030	4134	4234	4332	4438	4542	4640	4734	4844	4945

—	—	4032	4136	4285	4334	4440	4543	4641	4738	4845	4947
—	—	4035	4137	4236	4335	4444	4545	4642	4740	4848	4956
—	—	4038	4140	4238	4338	4445	4548	4644	4743	4850	4953
—	—	4040	4142	4240	4340	4446	4550	4646	4745	4851	4956
—	—	4042	4144	4242	4342	4450	4551	4648	4746	4854	4958
—	—	4044	4146	4245	4344	4452	4554	4650	4750	4858	4959
—	—	4046	4147	4246	4345	4454	4556	4653	4752	4860	4960
—	—	4047	4148	4248	4346	4455	4557	4654	4755	4862	4962
—	—	4048	4150	4250	4347	4458	4558	4655	4756	4865	4964
—	—	4050	4152	4251	4350	4460	4560	4656	4758	4866	4965
—	—	4053	4154	4254	4354	4462	4561	4658	4760	4870	4966
—	—	4056	4155	4255	4355	4464	4565	4660	4764	4872	4968
—	—	4059	4158	4256	4356	4465	4566	4662	4767	4875	4970
—	—	4060	4160	4257	4360	4466	4570	4664	4770	4876	4972
—	—	4062	4161	4260	4362	4470	4572	4665	4773	4878	4974
—	—	4065	4164	4263	4365	4472	4575	4668	4774	4879	4977
—	—	4066	4165	4264	4366	4473	4576	4669	4776	4880	4978
—	—	4068	4170	4266	4368	4476	4578	4670	4780	4884	4980
—	—	4070	4172	4268	4370	4480	4580	4674	4782	4886	4982
—	—	4071	4173	4270	4371	4482	4582	4675	4784	4888	4983
—	—	4074	4176	4272	4378	4484	4584	4676	4785	4890	4984
—	—	4080	4179	4275	4380	4485	4585	4680	4788	4893	4986
—	—	4081	4180	4277	4382	4488	4587	4683	4790	4895	4988
—	—	4082	4182	4278	4386	4490	4588	4686	4794	4896	4990
—	—	4085	4185	4280	4389	4494	4590	4690	4795	4898	4991
—	—	4076	4186	4284	4390	4495	4592	4692	4796	4899	4992
—	—	4088	4188	4290	4392	4498	4596	4695	4797	4900	4994
—	—	4089	4190	4292	4395	4500	4598	4697	4800	4902	4995
—	—	4090	4191	4294	4396	4503	4599	4698	4806	4905	4998
—	—	4092	4194	4296	4398	4505	4600	4700	4807	4906	—
—	—	4094	4199	4298	4400	4506	4620	4704	4809	4908	—

上記諸表にみられる分離数の個数を調べることにより，分離数の分布の概要は，次表によって示される。

表6　（1から5000までの間の分離数の分布）

型＼領域	1〜1000	1001〜2000	2001〜3000	3001〜4000	4001〜5000	計
(i)	14	2	4	1	2	23
(ii)	27	17	11	14	7	76
(iii)	298	409	449	463	478	2097
計	339	428	464	478	487	2196

なお，素数の双子[13]にならって，分離数の双子（引続いた二分離数）と称すべきものを，表1から拾うと，つぎの36組が得られる。その内訳は，(i)型内のものは0組（存在しない)。(ii)型内のものは，675，676 の1組。(iii)型内のものは，230，231；285，286；429，430；434，435；455，456；560，561；609，610；615，616；644，645；645，646；650，651；665，666；714，715；740，741；741，742；759，760；805，806；819，820；825，826；854，855；860，861；902，903；935，936；945，946；986，987；987，988 の26組。(i)型と(ii)型とにまたがるものは0組（存在しない)。(i)型と(iii)型とにまたがるものは，125，126；255，256；342，343；624，625；728，729 の5組。(ii)型と(iii)型とにまたがるものは，195，196；441，442；483，484；968，969 の4組。同様に表2以下について双子の組数を調べることにより，分離数の双子の分布の一班は，次表によって示される。

表7　（1から5000までの間の分離数の双子の分布）

型＼領域	1〜1000	1001〜2000	2001〜3000	3001〜4000	4001〜5000	計
(i) 内	0	0	0	0	0	0
(ii) 内	1	0	0	0	0	1
(iii) 内	26	77	123	135	147	508
(i)〜(ii)	0	0	0	0	0	0

(i)〜(iii)	5	2	2	1	2	12
(ii)〜(iii)	4	10	6	11	5	36
計	36	89	131	147	154	557

終りに，表1の検証ならびに表2〜表5の計算（プログラミングをも含めて）は，全く本学の日比野省三助教授（情報科学・システム工学）のご援助によるものであり，私はただ表2以下を表1と同一形式に整備する作業をしたのに過ぎない。ここに計算機使用の便宜を与えられた名古屋工業大学電子計算センターの御好意をも含めて，深く感謝の意を表する次第である。なおこの機会に、筆者がかつて正整数（自然数）の分離性に関する一連の研究を発表した頃，これに対して深い理解と評価を与えられ，詳細なる解説の一文をお書き下さった岐阜大学谷村義勝教授（抽象代数学・整数論）に対し，厚くお礼を申述べたいと思う。

なおここで本文に関連して，わが貧弱ではあるが真剣だった研究生活を回顧して，所感の一端を述べてみたい。思えば私の研究生活の発足は極めて晩く，今から四半世紀前，岐阜大学の設立とともに始まる。間もなく創刊の運びとなった年1回発行の同大学紀要（学芸研報一自然科学）に毎回寄稿（主として英文にて）するとともに，学会発表では日本数学会に，学会誌寄稿では日本数学教育会誌に負うところが多かった。そしてこの間，私の研究分野は，講義担当科目とともに，主として代数学特に整数論（並びに数の概念・数の体系）に向って展開されたのであるが，また内地研究の機を得た前後には，整数論のほかに数学基礎論特に記号論理学に対しても少なからず興味をもち，いささか勉強もしたのである（ただし後者については遂に何等の成果も挙げることができなかった)。その後は，国立大学定退という身分上の変更とともに，専門教育から一般教育に移ることとなり，必要上，数学（教養数学一般）とともに，より多く統計学（一般教養でこそ数学から独立された科目になっているが，その内容は数理統計学ないしは統計数学であって，数学の一分科に過ぎない）を担当することとなったため，自ら論文なども，その分野に属するものが多くなったという

のが実状である。そしてそのような機会を与えられたのが，本学（中京大学）の教養部紀要（教養論叢）であり，既に統計学に関するもの数編を寄稿し，今ここに整数論研究の総括的補足並びに史的解説の一編を寄稿することとなったのであるが，最早私が本学教養論叢とお付合いできるのも，残り少くなってきたようである。しかし後一編，数学基礎論特に記号論理学に関するもの（オリジナルなものとしてではなく，むしろ総合報告的なものとしての）を，何とかまとめたいとの念願に燃えているわけである。

つぎに統計学の位置づけに触れた（もちん歴史的に見るとき，統計学は数学・自然科学であるとともに，経済学・社会科学であったことは事実であり，現在もその傾向は残されてはいるが，もはや後者は統計学の主流とはいえない）のに関連して，数学の分野を明らかにするのに役立つと思うから，日本数学会の分科会名を挙げれば，現在，Ⅰ．数学基礎論，Ⅱ．代数学，Ⅲ．幾何学，Ⅳ．関数論，Ⅴ．関数方程式論，Ⅵ．実関数論，Ⅶ．関数解析学，Ⅷ．統計数学，Ⅸ．応用数学，Ⅹ．トポロジー（位相数学）の10部門がある。私は現在、Ⅰ，Ⅱ，Ⅷの３分析科会に所属しているが，見るべき業積のないのを残念に思う。（仮りにあるとしても，謙遜ではないが，まことに微々たるものといわねばなるまい）なおトム教授の破局の理論（カタストロフィーの理論）として，ジャーナリズムを賑わしたのは，もちろん上記Ⅹの分野に属するものであるこヲ，並びに部門全体として見るとき，Ⅹ（トポロジー）自体，上記10部門のうちで，Ⅰ（数学基礎論）等とともに，、最も新しい分野に属するものであることを付言しておきたい。

文　　献

1) Meder, A. E.（玉木和之訳）：日本数学教育会編‘数学教育の現代化’1967, 357-356.
2) 近藤孝一：整数論，1948，19-20.
3) 矢野健太郎：新しい数学，1969. 84—87.
4) 千賀　博：日本数学教育会誌，**40**(1).（1958）.24.
5) Senga, H. : Science Report of the Faculty of Liberal Arts and

Education, Gifu University (Natural Science), 2(4), (1960), 353-356.
6) 大矢真一：ピタゴラスの定理，1952. 20.
7) Thurston, H. A. : The Number-System, 1956, 12.
8) Quine, W. V. O. : J. Symbolic Logic, 11(4), (1946), 113-114.
9) Senga, H. : Sciece Report of F. L. A. E., Gifu University (Natural Science), 1(5), (1957), 472.
10) [illegible] : [illegible], 1(5), (1957), 473-475.
11) 高木貞治：初等整数論講義. 1931，13-29.
12) [illegible] : [illegible]. 1931，16.
13) [illegible] : [illegible], 1931，28.